# Przestrzeń probabilistyczna dyskretna
# Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

## Definicja

Niech $\Omega$ będzie dowolnym zbiorem co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym. Każdą funkcję $p$ ze zbioru $\Omega$ w zbiór $\mathbb{R}$, nieujemną i taką, że

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega$. Parę $(\Omega, p)$ nazywamy ziarnistą, albo dyskretną przestrzenią probabilistyczną.

### Przykład.

Niech $\Omega = \{\star, \bowtie, \bullet\}$ i $p(\star) = \frac{1}{3}$, $p(\bowtie) = \frac{1}{2}$, $p(\bullet) = \frac{1}{6}$.

Para $(\Omega, p)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

**Przykład.**

Niech $\Omega = \{\star, \bowtie, \bullet\}$ i $p(\star) = \frac{1}{3}$, $p(\bowtie) = \frac{1}{2}$, $p(\bullet) = \frac{1}{6}$.

Para $(\Omega, p)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

**Przykład.**

Przestrzenią probabilistyczną jest para $(\Omega, p)$, gdzie

$$\Omega = \{a, b, c\} \text{ oraz } p(a) = \frac{1}{3},\ p(b) = 0 \text{ i } p(c) = \frac{2}{3}.$$

**Definicja.**

Niech $p(\omega) = \dfrac{1}{s}$ dla każdego $\omega \in \Omega$, gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. Funkcję $p$ nazywamy klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega$, a parę $(\Omega, p)$ — klasyczną przestrzenią probabilistyczną.

**Definicja.**

Niech $p(\omega) = \dfrac{1}{s}$ dla każdego $\omega \in \Omega$, gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. Funkcję $p$ nazywamy klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega$, a parę $(\Omega, p)$ — klasyczną przestrzenią probabilistyczną.

**Przykład.**

Szczególnymi klasycznymi przestrzeniami probabilistycznymi są w rachunku prawdopodobieństwa pary:

$(\Omega_M, p_M)$, gdzie $\Omega_M = \{o, r\}$ oraz $p_M(o) = p_M(r) = \frac{1}{2}$,

$(\Omega_K, p_K)$, gdzie $\Omega_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz $p_K(j) = \frac{1}{6}$ dla $j \in \Omega_K$.

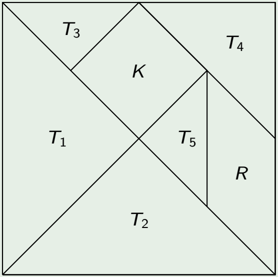
### Przykład.

Rozkładem prawdopodobieństwa na przeliczalnym zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ jest funkcja $p$, gdzie

$$p(\omega_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla} \quad \omega_n \in \Omega.$$

Para $(\Omega, p)$ jest przykładem przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej.

## Przykład.

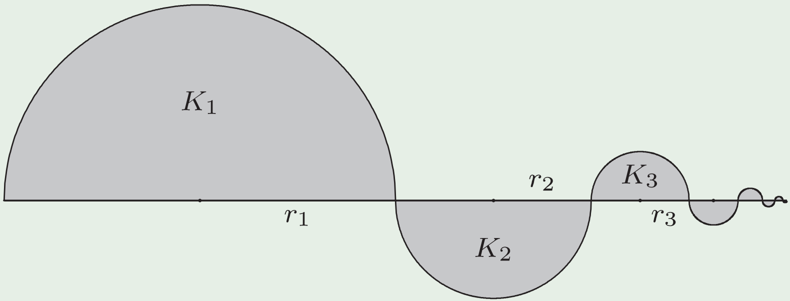



Niech $\Omega = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, K, R\}$

oraz

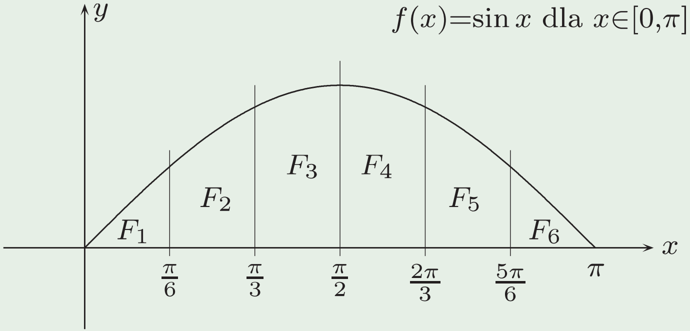
$p(T_1) = \frac{1}{4}$, $p(T_2) = \frac{1}{4}$, $p(T_3) = \frac{1}{16}$, $p(T_4) = \frac{1}{8}$, $p(T_5) = \frac{1}{16}$,
$p(K) = \frac{1}{8}$, $p(R) = \frac{1}{8}$.

## Przykład.




$$r_1 = \frac{1}{2\pi},\ r_2 = \frac{1}{4\pi},\ \ldots,\ r_n = \frac{1}{2n\pi},\ \ldots$$

## Przykład.


$y$
$f(x) = \sin x$ dla $x \in [0, \pi]$
$F_1$
$F_2$
$F_3$
$F_4$
$F_5$
$F_6$
$x$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\pi$

# Rozkład zero-jedynkowy

**Definicja.**

Funkcja

$$p^u_{0-1}(j) = u^j(1-u)^{1-j} \quad \text{dla} \quad j = 0, 1,$$

gdzie $u$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_{0-1} = \{0, 1\}$, a więc para $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$ jest przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $p^u_{0-1}$ nazywamy rozkładem zero-jedynkowym, parę $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$ zaś zero-jedynkową przestrzenią probabilistyczną.

# Rozkład dwumianowy

**Definicja.**

Niech $u \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_2$. Każdą funkcję $p : \{0,1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$p(k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

nazywamy rozkładem dwumianowym albo rozkładem Bernoulliego.

# Rozkład geometryczny

**Definicja.**

Niech $u \in (0,1)$ oraz $v = 1 - u$. Funkcję $p : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$p(n) = u \cdot v^{n-1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

nazywamy rozkładem geometrycznym.

# Rozkład Pascala

**Definicja.**

Niech $k$ będzie ustaloną liczbą naturalną i $k \geqslant 1$ oraz $u \in (0,1)$. Funkcję $p : \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$p(n) = \binom{n-1}{k-1} u^k (1-u)^{n-k} \quad \text{dla} \quad n = k, k+1, k+2, ...,$$

nazywamy rozkładem Pascala.

W przypadku $k = 1$ rozkład Pascala jest rozkładem geometrycznym.

# Rozkład hipergeometryczny

**Definicja.**

Niech $c, n$ i $s$ będą ustalonymi liczbami naturalnymi, gdzie $0 < c < s$ oraz $0 < n \leqslant s$. Funkcję $p$ określoną wzorem

$$p(k) = \frac{\binom{c}{k}\binom{s-c}{n-k}}{\binom{s}{n}} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, min\{n, c\} \quad \text{i} \quad n - k \leqslant s - c,$$

nazywamy rozkładem hipergeometrycznym.

# Rozkład Poissona

**Definicja.**

Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$. Funkcję $p : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

nazywamy rozkładem Poissona.

## Definicja.

Przestrzenie probabilistyczne $(\Omega_1, p_1)$ i $(\Omega_2, p_2)$ nazywamy izomorficznymi lub równoważnymi, jeśli istnieje bijekcja $g$ ze zbioru $\Omega_1$ na zbiór $\Omega_2$ taka, że

$$\forall \omega \in \Omega_1, \overline{\omega} \in \Omega_2 \left[\overline{\omega} = g(\omega) \Longrightarrow p_2(\overline{\omega}) = p_1(\omega)\right].$$

O bijekcji $g$ mówimy, że ustala izomorfizm i że zachowuje prawdopodobieństwo.

### Definicja.

Załóżmy, że pary $(\Omega_1, p_1)$ i $(\Omega_2, p_2)$ są ziarnistymi przestrzeniami probabilistycznymi. Niech

$$\Omega_{1-2} = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_1 \wedge y \in \Omega_2\}.$$

Określmy na zbiorze $\Omega_{1-2}$ funkcję $p_{1-2}$ następująco:

$$p_{1-2}(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \ \text{ dla } x \in \Omega_1, \ y \in \Omega_2.$$

Parę $(\Omega_{1-2}, p_{1-2})$ nazywamy produktem kartezjańskim przestrzeni probabilistycznych $(\Omega_1, p_1)$ oraz $(\Omega_2, p_2)$ i oznaczamy $(\Omega_1, p_1) \times (\Omega_2, p_2)$. Produkt $(\Omega, p) \times (\Omega, p)$, nazywamy kwadratem kartezjańskim i oznaczamy $(\Omega, p)^2$.